Matrices et déterminants de Gram | Leçons : 149, 157, 213, 219, (161, 208)

| Algebra, Gourdon |

Rap : ▶ Matrice de Gram ~~hermitienne positive~~ symétrique positive

▶ Matrice de Gram définie ssi $(x_1, \dots, x_n)$ est libre

Preuve :

▶ $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x_1, \dots, x_n \in E$ et M leur matrice de Gram

Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $m = \dim F$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F.

et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, X_i le vecteur colonne des coordonnées de x_i dans $\mathcal{B} \Rightarrow \langle x_i | x_j \rangle = X_i^* X_j$

On a $M = N^* N$ où N est la matrice dont les colonnes sont les X_i.

On a donc $M^* = N^* N^{**} = N^* N = M$ d'où M hermitienne

et $\forall$ vecteur colonne X on a $X^* M X = (X^* N^*)(N X) = (NX)^* (NX) = \|NX\|^2$

d'où M est positive

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $M = (a_{ij})$ une matrice hermitienne positive.

Il existe donc une matrice hermitienne H telle que $M = H^2 = H^* H$

On note $X_1, \dots, X_n$ les colonnes de H on a donc

$a_{ij} = X_i^* X_j = \langle X_i | X_j \rangle$ d'où M est bien une matrice de Gram

▶ Matrice de Gram M est définie $\Leftrightarrow$ $X^* M X = 0 \Rightarrow X = 0$

~~$\Leftrightarrow (X^* M$~~

Or on a $X^* M X = \|NX\|^2$

Donc M est définie $\Leftrightarrow \|NX\|^2 = 0 \Rightarrow X = 0$

$\Leftrightarrow \ker N = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ les $(x_1, \dots, x_n)$ est libre

Théorème : $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ esp préhilbert, $V \subset E$ muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$

$$\forall x \in E, \quad d^2(x, V) = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Preuve :

On a $d(x,V) = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur V.

Soit $z = x - p(x)$

On a $\forall i$, $\langle e_i, p(x) \rangle = \langle e_i, x \rangle$ et $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|z\|^2$

D'où

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} \langle e_1|e_1\rangle & \cdots & \langle e_1|e_n\rangle & \langle e_1|x\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_n|e_1\rangle & \cdots & \langle e_n|e_n\rangle & \langle e_n|x\rangle \\ \hline \langle x|e_1\rangle & \cdots & \langle x|e_n\rangle & \langle x|x\rangle \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \langle e_1|e_1\rangle & \cdots & \langle e_1|e_n\rangle & \langle e_1|p(x)\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_n|e_1\rangle & \cdots & \langle e_n|e_n\rangle & \langle e_n|p(x)\rangle \\ \hline \langle p(x)|e_1\rangle & \cdots & \langle p(x)|e_n\rangle & \|p(x)\|^2 + \|z\|^2 \end{array}\right]$$

Or $\det M$ est linéaire par rapport aux colonnes de M, donc on a $\det M = \det P + \det Q$

où

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \hline \cdots & \|p(x)\|^2 \end{array}\right] \quad \text{et} \quad Q = \left[\begin{array}{c|c} \cdots & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \cdots & \|z\|^2 \end{array}\right]$$

Or $\det P = G(e_1, \dots, e_n, p(x)) = 0$ car $p(x) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

et $\det Q = \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$ par développement sur la dernière colonne.

D'où $G(e_1, \dots, e_n, x) = \det M = \det Q = \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$

$$\Rightarrow \|z\|^2 = \|x - p(x)\|^2 = d(x,V)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Algèbre, Gourdon

Thm : (Inégalité de Hadamard)

- Si $x_1, \dots, x_n \in E$, $|G(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2$
- Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$, $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|$

Preuve :

- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ il n'y a donc rien à montrer.

On montre par récurrence $\mathcal{P}_n$: " Pour toute famille libre $(x_1, \dots, x_n)$ on a $G(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2$ "

- Si $n = 1$ on a $G(x_1) = \|x_1\|^2$
- On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie on a pour $(x_1, \dots, x_{n+1})$ famille libre de E et on notant $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ il existe $(f, g) \in F \times F^\perp$ tel que $x_{n+1} = f + g$ d'où d'après avant

f est le projeté orthogonal de x_{n+1} sur F.

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = G(x_1, \dots, x_n) \cdot \|g\|^2 \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_{n+1}\|^2 \quad \text{car } \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 = \|x_{n+1}\|^2$$

par orthogonalité.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les matrices sont $v_1, \dots, v_n$

on a $G(v_1, \dots, v_n) = \det(M^* M) = \det M^* \cdot \det M = |\det M|^2$ d'où le résultat.

□

COMPLEMENT

- ~~Le théorème spectral est vrai sur les espaces hermitiens : Toute matrice auto-adjointe est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles~~
- Si M est auto-adjointe positive alors $\exists H$ auto-adjointe positive tq $M = H^2$: conséquence du théorème spectral
- Interprétation géométrique, $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ est le volume du parallélotope engendré par $v_1, \dots, v_n$. Le volume maximal est ~~engendré~~ atteint quand les angles sont droits.

• Remarque : Un esp préhilb' de dim finie est un esp de Hilbert, d'où V qui est un sev de E est fermé d'où le thm de projec°.

$\forall x \in E, \exists! y \in V$ tq ~~dist~~ $d(x, V) = \|x-y\|$ et $x-y \in V^\perp$

En effet pour $(e_i)_i$ b.o.n de V (existe par Gram-Schmidt)

$\forall x \in E$ on définit $y = \sum \langle x, e_k \rangle e_k \Rightarrow \langle x-y, e_j \rangle = 0 \Rightarrow x-y \in V^\perp$

D'où $\forall z \in V$, $\|x-z\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$

D'où $\|x-y\| = \inf_{z \in V} \|x-z\| = d(x, F)$ et ce vecteur est unique.